

Lee-Jin の結果の空間グラフの正則図への拡張について

新 庄 玲 子

1. 空間グラフとその正則図

扱うグラフは有限個の頂点と辺から成る**有限グラフ**とする。

グラフ G を自然に位相空間とみなし, 3次元空間 R^3 に埋め込んだものを G の**空間埋め込み** (spatial embedding) または**空間グラフ** (spatial graph) という。特に G が 1次元球面 S^1 に同相なグラフのとき, その空間埋め込みは**結び目** (knot), いくつかの S^1 の非交和に同相なグラフのときは**絡み目** (link) と呼ばれる。よって空間グラフは結び目, 絡み目の拡張としてとらえることができる。

2つの空間グラフ \tilde{G} と \tilde{G}' に対し, \tilde{G} を \tilde{G}' に移す R^3 の向きを保つ自己同相写像があるとき \tilde{G} と \tilde{G}' は**同値である** と言い, $\tilde{G} \sim \tilde{G}'$ と表す。

空間グラフ \tilde{G} の**正則図** (diagram) D とは, 多重点として有限個の横断的な2重点のみを持つような射影 $p: R^3 \rightarrow R^2 \equiv R^2 \times \{0\}$ による \tilde{G} に同値な空間グラフの像で, 各2重点において下を通る辺の一部を消去することで上下の情報を付加したものである。2つの正則図 D と D' に対し, D を D' に移す R^2 の向きを保つ自己同相写像で上下の情報を保つものがあるとき, D と D' は**同値である** といい $D \sim D'$ と表す。

本稿では絡み目の正則図に関して [2] で示されている結果を空間グラフに拡張することができたのでそれを紹介する。

2. Lee-Jin の結果

与えられた空間グラフの正則図を考える。その正則図に対して行う図1の (I)~(V) の変形を, 空間グラフの**ライデマイスター変形** (Reidemeister move), 略して R -変形という。特に (I)~(III) の変形を結び目, 絡み目の R -変形という。

2つの空間グラフ \tilde{G} と \tilde{G}' が同値であるための必要十分条件は, \tilde{G} と \tilde{G}' の正則図が有限回の R -変形で同値なものに変形できるということである, ということが知られている。例えば証明は, 結び目, 絡み目に関しては [1] にある。

\tilde{G} の頂点の集合, 辺の集合をそれぞれ $V(\tilde{G})$, $E(\tilde{G})$ と表すことにする。空間グラフ \tilde{G} の正則図 D と \tilde{G} の部分空間グラフ \tilde{H} に対し, D から $V(\tilde{H})$ にも $E(\tilde{H})$ にも対応していない部分を取り除くことにより得られる \tilde{H} の正則図を D の \tilde{H} への**制限**といい $D(\tilde{H})$ で表すことにする。

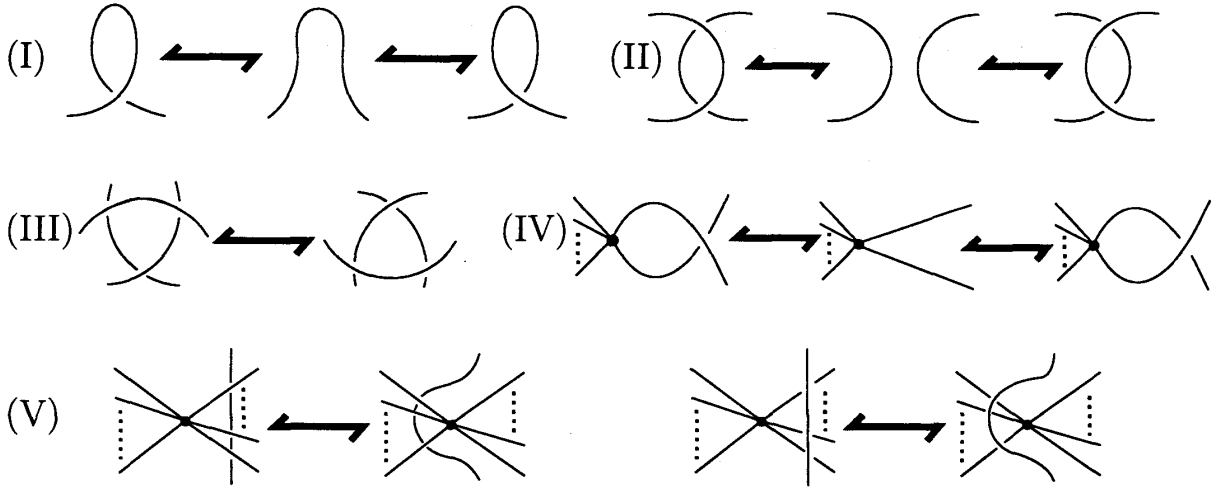


図 1: ライデマイスター変形

補題 2.1 (Lee-Jin [2]) D を絡み目 L の正則図とする。 L の任意の部分絡み目 L_0 と、 L_0 の任意の正則図 D_0 に対して、 次の 2 つを満たす L の正則図 D' が存在する。

$$(i) D'(L_0) \sim D_0$$

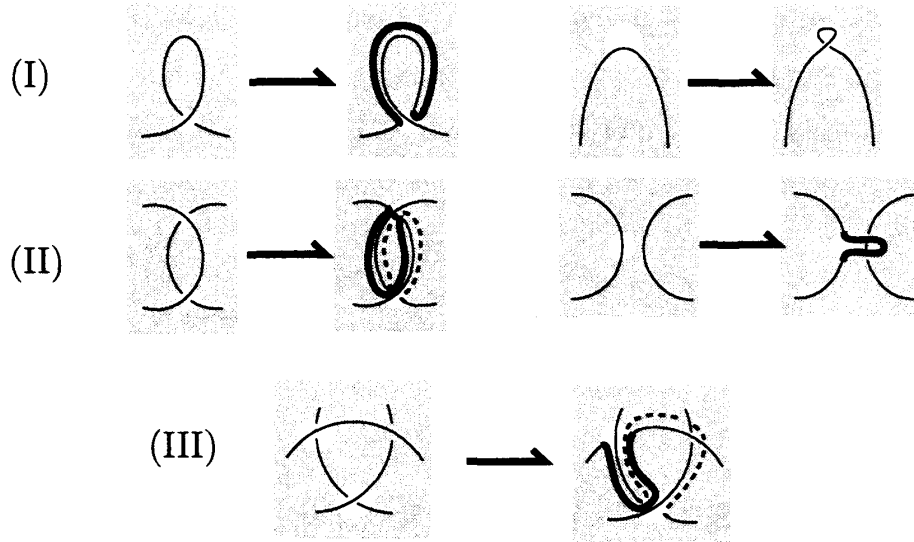
$$(ii) D'(L \setminus L_0) = D(L \setminus L_0)$$

証明 ある正の整数 n に対し、 D_{i+1} が D_i から R -変形 (I)~(III) のいずれか 1 回で得られる正則図の列 $D(L_0) = D_1, \dots, D_n \sim D_0$ をとることができる。 ($i = 1, 2, \dots, n-1$)。 このことから R -変形 (I)~(III) が $L \setminus L_0$ を固定したまま実現できることがいえればよいことがわかる。

図 2 は正則図の一部を表したものである。 描かれているのは L_0 の一部であり、 灰色の領域では $L \setminus L_0$ に対応する弧が走っていてもよい。 以下、本稿ではそのようになるように白い領域は十分小さくとられているものとする。 太線は $L \setminus L_0$ の弧の上を通っている L_0 の一部を、 点線は $L \setminus L_0$ の下を通っている L_0 の一部を、 また細線は $L \setminus L_0$ の上を通ったり下を通ったりしている L_0 の一部を表している。 これらの図はどのようにすれば R -変形 (I)~(III) を $L \setminus L_0$ を固定したまま実現できるのかを示している。 \square

定理 2.2 (Lee-Jin [2]) 絡み目 L は部分絡み目 L_1, \dots, L_n の非交和であり、 D_1, \dots, D_n はそれぞれ L_1, \dots, L_n の任意の正則図であるとする。 このとき L の正則図 D で、 L_1, \dots, L_n への各制限が D_1, \dots, D_n に同値になるものが存在する。

証明 $D^{(0)}$ を L の任意の正則図とする。 補題 2.1 より、 ある正の整数 n に対して L の正則図の有限列 $D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ で $D^{(i)}(L_i) \sim D_i$, $D^{(i)}(L \setminus L_i) = D^{(i-1)}(L \setminus L_i)$ となるものが存在することがわかる ($i = 1, 2, \dots, n$)。 この $D^{(n)}$ が求める正則図である。 \square

図 2: $L \setminus L_0$ を固定した R -変形 (I)(II)(III)

3. 空間グラフへの拡張

ここでは補題 2.1 と定理 2.2 と同様のことが空間グラフに関しても成立することがわかったのでそれを示す。

補題 3.1 \tilde{G} を空間グラフ, \tilde{H} と \tilde{H}' を $\tilde{G} = \tilde{H} \cup \tilde{H}'$, $\tilde{H} \cap \tilde{H}' \subset V(\tilde{G})$ となる \tilde{G} の部分空間グラフ, D を空間グラフ \tilde{G} の正則図とする。このとき \tilde{H} の正則図 D_0 に対して, 次の 2 つを満たすような G の正則図 D' が存在する。

$$(i) D'(\tilde{H}) \sim D_0$$

$$(ii) D'(\tilde{H}') = D(\tilde{H}')$$

証明 絡み目の時と同様に, ある正の整数 n に対し D_{i+1} が D_i から R -変形 (I)~(V) のいずれか 1 回で得られるような正則図の列 $D(\tilde{H}) = D_1, \dots, D_n \sim D_0$ をとることができる ($i = 1, 2, \dots, n-1$)。 R -変形 (I)~(III) については補題 2.1 と同様にして \tilde{H}' を固定したまま行うことができる。よって R -変形 (IV) と (V) が \tilde{H}' を固定したまま実現できることがいえればよい。

はじめに R -変形 (IV) が \tilde{H}' を固定したまま実現できることを示す。図 3 で描かれているのは \tilde{H} の弧に対応する一部であるが, 灰色の領域では \tilde{H}' に対応する弧が走っていてもよい。図 3(1) の白い領域内の \tilde{H} の弧を \tilde{H}' の上を通るようにして (2) のように変形できる。(2) の太線は \tilde{H}' の上を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を表している。(3) の太線部分に R -変形 (II) を \tilde{H}' を固定したまま行うことができれば, \tilde{H}' を固定したまま R -変形 (IV) が実現できたことになる。 R -変形 (II) についてはすでに補題

2.1 で示されているので, \tilde{H}' を固定したまま R -変形 (IV) が実現できることがわかる。参考までに描いておくが, (3) は (4) のように変形される。(4) においては補題 2.1 の証明中と同様に, 太線は \tilde{H}' の上を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を, 点線は \tilde{H}' の下を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を表している。

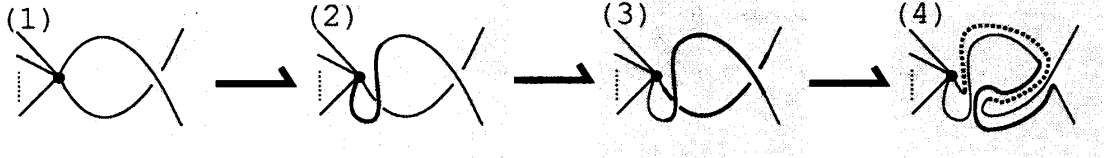


図 3: \tilde{H}' を固定した R -変形 (IV)

次に R -変形 (V) について考える。図 4 で描かれているのは \tilde{H} の弧に対応する一部であるが, 灰色の領域では \tilde{H}' に対応する弧が走っていてもよい。(1) の白い領域に描かれている弧を \tilde{H}' の下を通し (2) のように変形することができる。(2) の点線部分は \tilde{H}' の下を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を表している。補題 2.1 と同様にして (3) の太線部分に R -変形 (II) を \tilde{H}' を固定したまま行くと (4) のように変形できる。(4) において太線は \tilde{H}' の上を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を, 点線は \tilde{H}' の下を通っている \tilde{H} の一部に対応する部分を表している。(4) の頂点から右側に出ている辺に対してこの変形を繰り返すことで, \tilde{H}' を固定したまま R -変形 (V) が実現できることがわかる。□

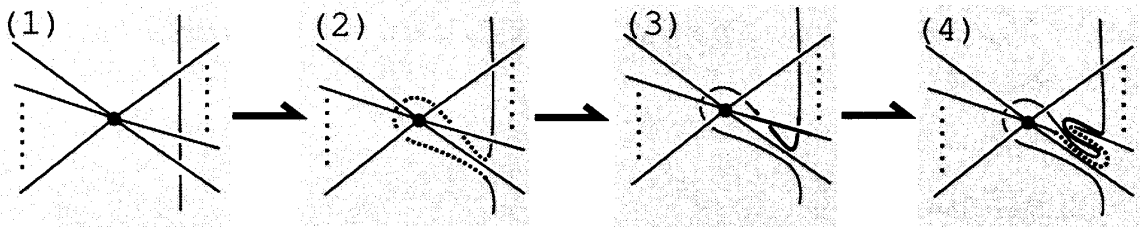


図 4: \tilde{H}' を固定した R -変形 (V)

この補題 3.1 より次が従う。

定理 3.2 D_1, \dots, D_n を正則図とする。空間グラフ \tilde{G} が, $\tilde{H}_i \cap \tilde{H}_j \subset V(\tilde{G})$ ($i \neq j$) となる部分空間グラフ $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n$ で, 各々が正則図 D_1, \dots, D_n を持つものの和集合となっているとき, \tilde{G} の正則図 D で, $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n$ への制限がそれぞれ D_1, \dots, D_n に同値になるものが存在する。

証明 $D^{(0)}$ を \tilde{G} の任意の正則図とする。補題 3.1 より, ある正の整数 n に対して, \tilde{G} の正則図の有限列 $D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ で $D^{(i)}(\tilde{H}_i) \sim D_i$, $D^{(i)}(\tilde{G} \setminus \tilde{H}_i) = D^{(i-1)}(\tilde{G} \setminus \tilde{H}_i)$ となるものが存在することがわかる ($i = 1, 2, \dots, n$)。ここで $\tilde{G} \setminus \tilde{H}_i$ は H_1, \dots, H_n の H_i 以外の和を表している。この $D^{(n)}$ が求める正則図である。 \square

参考文献

- [1] G. Burde and H. Zieschang: Knots, de Gruyter Studies in Mathematics, 5, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1985.
- [2] Jung Hoon Lee and Gyo Teak Jin: Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions, Kobe J. Math., 18 (2001), 199–202.